2階準線形楕円型方程式系の球対称な非負値全域解について (関数方程式と数理モデル)

寺本, 智光

数理解析研究所講究録 1309 巻 2003 年 23-30

2 階準線形楕円型方程式系の球対称な非負値全域解について

寺本 智光 ・ 広島大学理学部

(Tomomitsu Teramoto, Hiroshima University)

0. Introduction

次の 2 階準線形楕円型方程式系の球対称な非負値全域解について考える.

$$(0.1)\qquad \begin{cases} \Delta_{p_1}u_1 = H_1(|x|)u_2^{\alpha_1}, \\ \Delta_{p_2}u_2 = H_2(|x|)u_3^{\alpha_2}, \\ \qquad\vdots \\ \Delta_{p_m}u_m = H_m(|x|)u_{m+1}^{\alpha_m}, \quad u_{m+1} = u_1, \end{cases} \qquad x \in \mathbf{R}^N,$$

ここで $\Delta_p u = \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du)$, $N \geq 1$, $m \geq 2$, $p_i > 1$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, m$, は定数で $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m > (p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_m-1)$ を満たすとする. $H_i(r) \geq 0$, $r = |x|$, は $[0, \infty)$ で連続とする.

$(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ が (0.1) の全域解とは $u_i, |Du_i|^{p_i-2}Du_i \in C^1(\mathbf{R}^N)$, $i = 1, 2, \cdots, m$, で $\mathbf{R}^N$ で (0.1) を満たすときをいう. $(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ が非負値とは, $u_i \geq 0$, $i = 1, 2, \cdots, m$, のときをいう. 関数 u が球対称とは u が $|x|$ のみに依存するときをいう.

このタイプの方程式 (系) は, 文献 [1, 2]($m = 1$ の場合),[3]($m = 2$ の場合), [4, 6]($p_i = 2, i = 1, 2, \cdots, m$, のとき) で正値全域解の存在や非存在について研究している. $m = 2$ のときの結果を大雑把に述べる:

Theorem 0.1 [3, Theorems 1 and 2]. $m = 2$ とする. $H_i, i = 1, 2$, が

$$(0.2)\qquad \frac{C_1}{|x|^{\lambda_i}} \leq H_i(|x|) \leq \frac{C_2}{|x|^{\lambda_i}}, \quad |x| \geq r_0 > 0,\ i = 1, 2,$$

を満たすとする, ここで $C_i > 0, \lambda_i$, $i = 1, 2$, は定数.

(i) $\lambda_i, i = 1, 2$, が

$$(0.3)\qquad \begin{cases} \lambda_1 - p_1 + \dfrac{\alpha_1(\lambda_2 - p_2)}{p_2 - 1} > \dfrac{\alpha_1\alpha_2 - (p_1-1)(p_2-1)}{(p_1-1)(p_2-1)}\max\{0, p_1 - N\} \quad \text{and} \\ \lambda_2 - p_2 + \dfrac{\alpha_2(\lambda_1 - p_1)}{p_1 - 1} > \dfrac{\alpha_1\alpha_2 - (p_1-1)(p_2-1)}{(p_1-1)(p_2-1)}\max\{0, p_2 - N\}, \end{cases}$$

を満たすとする. このとき (0.1) の球対称な正値全域解が存在する.

(ii) $\lambda_i, i = 1, 2$, が

$$\begin{cases} \lambda_1 - p_1 + \dfrac{\alpha_1(\lambda_2 - p_2)}{p_2 - 1} \leq \dfrac{\alpha_1\alpha_2 - (p_1-1)(p_2-1)}{(p_1-1)(p_2-1)}\max\{0, p_1 - N\} \quad \text{or} \\ \lambda_2 - p_2 + \dfrac{\alpha_2(\lambda_1 - p_1)}{p_1 - 1} \leq \dfrac{\alpha_1\alpha_2 - (p_1-1)(p_2-1)}{(p_1-1)(p_2-1)}\max\{0, p_2 - N\}, \end{cases}$$

を満たすとする. このとき (0.1) の球対称な非負値非自明な全域解は存在しない.

Theorem 0.2 [3, Theorems 3 and 4]. $m=2,\ p_i=N,\ i=1,2,$ とする. $H_i, i=1,2,$ が

$$\frac{C_1}{|x|^N(\log|x|)^{\lambda_i}} \le H_i(|x|) \le \frac{C_2}{|x|^N(\log|x|)^{\lambda_i}}, \quad |x|\ge r_0>1,\ i=1,2,$$

を満たすとする, ここで $C_i>0, \lambda_i,\ i=1,2,$ は定数.
(i) $\lambda_i, i=1,2,$ が

$$\begin{cases} \lambda_1 - N + \dfrac{\alpha_1(\lambda_2-N)}{N-1} > \dfrac{\alpha_1\alpha_2-(N-1)^2}{N-1} & \text{and} \\ \lambda_2 - N + \dfrac{\alpha_2(\lambda_1-N)}{N-1} > \dfrac{\alpha_1\alpha_2-(N-1)^2}{N-1}, \end{cases}$$

を満たすとする. このとき (0.1) の球対称な正値全域解が存在する.
(ii) $\lambda_i, i=1,2,$ が

$$\begin{cases} \lambda_1 - N + \dfrac{\alpha_1(\lambda_2-N)}{N-1} < \dfrac{\alpha_1\alpha_2-(N-1)^2}{N-1} & \text{or} \\ \lambda_2 - N + \dfrac{\alpha_2(\lambda_1-N)}{N-1} < \dfrac{\alpha_1\alpha_2-(N-1)^2}{N-1}, \end{cases}$$

を満たすとする. このとき (0.1) の球対称な非負値非自明な全域解は存在しない.

Theorem 0.1 より $H_i,\ i=1,2,$ が (0.2) を満たしている場合, (0.1) の球対称な非負値非自明な全域解が存在するための必要十分条件は (0.3) ということがわかる.

Theorem 0.2 で $N=2$ のとき, (ii) の条件は "$<$" を "$\le$" としても成立することがわかっている. このことから $N\ne 2$ の場合でも, (ii) の条件は "$<$" を "$\le$" としても成立すると予想される.

この論文の目的は Theorems 0.1, 0.2 を $m\ge 3$ の場合に拡張することと, 上に述べた予想が正しいことを示すことである.

記号の導入： A, P を次のように定義する：

$$A=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m, \quad P=(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_m-1).$$

$\lambda_i\in\mathbf{R},\ i=1,2,\cdots,m,$ に対して Λ_i を次のように定義する:

$$\begin{aligned}\Lambda_i = \ & \lambda_i - p_i + \frac{(\lambda_{i+1}-p_{i+1})\alpha_i}{p_{i+1}-1} + \frac{(\lambda_{i+2}-p_{i+2})\alpha_i\alpha_{i+1}}{(p_{i+1}-1)(p_{i+2}-1)} + \cdots \\ & + \frac{(\lambda_{i+m-2}-p_{i+m-2})\alpha_i\alpha_{i+1}\cdots\alpha_{i+m-3}}{(p_{i+1}-1)(p_{i+2}-1)\cdots(p_{i+m-2}-1)} + \frac{(\lambda_{i+m-1}-p_{i+m-1})\alpha_i\alpha_{i+1}\cdots\alpha_{i+m-2}}{(p_{i+1}-1)(p_{i+2}-1)\cdots(p_{i+m-1}-1)},\end{aligned}$$

$$\beta_i = \frac{P\Lambda_i}{(A-P)(p_i-1)}. \tag{0.4}$$

Remark. (i) α_i, p_i の条件より $A>P$ となる.
(ii) $\lambda_{i+m}=\lambda_i,\ \alpha_{i+m}=\alpha_i$ と解釈する.

1. Existence results

(0.1) の非負値全域解の存在について次の結果を得た.

Theorem 1.1. $H_i,\ i=1,2,\cdots,m$, は次を満たすとする：

$$H_i(|x|) \le \frac{C_i}{|x|^{\lambda_i}}, \quad |x| \ge r_0 > 0,$$

ここで $C_i > 0,\ \lambda_i,\ i=1,2,\cdots,m$, は定数. さらに, この λ_i に対して Λ_i が

$$\Lambda_i > \frac{A-P}{P} \max\{0, p_i - N\}, \quad i=1,2,\cdots,m,$$

を満たすとする. このとき (0.1) の球対称な正値全域解が存在する.

Theorem 1.2. $p_i = N,\ i=1,2,\cdots,m$, とする. $H_i,\ i=1,2,\cdots,m$, は次を満たすとする：

$$H_i(|x|) \le \frac{C_i}{|x|^N(\log|x|)^{\lambda_i}}, \quad |x| \ge r_0 > 1,$$

ここで $C_i > 0,\ \lambda_i,\ i=1,2,\cdots,m$, は定数. さらに, この λ_i に対して Λ_i が

$$\Lambda_i > \frac{A-(N-1)^m}{(N-1)^{m-1}}, \quad i=1,2,\cdots,m,$$

を満たすとする. このとき (0.1) の球対称な正値全域解が存在する.

Remark. これらの結果は $m=2$ のとき [3] の結果と一致する.

証明には Schauder-Tychonoff の不動点定理を用いる. 詳細は [5] を参照.

2. Growth estimates for nonnegative entire solutions

(0.1) の球対称な非負値全域解の評価について次の結果を得た.

Theorem 2.1. $H_i,\ i=1,2,\cdots,m$, は次を満たすとする：

$$H_i(|x|) \ge \frac{C_i}{|x|^{\lambda_i}}, \quad |x| \ge r_0 > 0,$$

ここで $C_i > 0,\ \lambda_i,\ i=1,2,\cdots,m$, は定数. このとき $(u_1,u_2,\cdots,u_m)$ を (0.1) の球対称な非負値全域解とすると $u_i,\ i=1,2,\cdots,m$, は次を満たす：

$$u_i(|x|) \le \tilde{C}_i |x|^{\beta_i} \quad \text{at} \quad \infty, \quad i=1,2,\cdots,m,$$

ここで $\tilde{C}_i > 0, i=1,2,\cdots,m$, は定数, $\beta_i, i=1,2,\cdots,m$, は (0.4) で定義されたもの.

Theorem 2.2. $p_i = N,\ i=1,2,\cdots,m$, とする. $H_i,\ i=1,2,\cdots,m$, は次を満たすとする：

$$H_i(|x|) \ge \frac{C_i}{|x|^N(\log|x|)^{\lambda_i}}, \quad |x| \ge r_0 > 1,$$

ここで $C_i > 0,\ \lambda_i,\ i = 1,2,\cdots,m$, は定数. このとき $(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ を (0.1) の球対称な非負値全域解とすると, $u_i,\ i = 1,2,\cdots,m$, は次を満たす：

$$u_i(|x|) \le \tilde{C}_i(\log|x|)^{\beta_i} \quad \text{at} \quad \infty, \tag{2.1}$$

ここで $\tilde{C}_i > 0,\ i = 1,2,\cdots,m$, は定数, $\beta_i,\ i = 1,2,\cdots,m$, は (0.4) で定義されたもの.

Theorem 2.1 の証明は [5] を参照.

Theorem 2.2 の証明のポイントは次の補題である.

Lemma 2.3 $p_i = N,\ i = 1,2,\cdots,m$, とする. $(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ を (0.1) の球対称な非負値全域解とする. このとき, $u_i,\ i = 1,2,\cdots,m$, は次を満たす：

$$u_i(r) \ge u_i(0) + \left(\int_0^r s^{N-1}H_i(s)\left(\log\frac{r}{s}\right)^{N-1} u_{i+1}(s)^{\alpha_i}ds\right)^{\frac{1}{N-1}}, \quad r \ge 0.$$

この補題の証明は [5] を参照.

Theorem 2.2 の証明の概要. $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_m)$ を (0.1) の球対称な非負値全域解とする. $\mathbf{u} \not\equiv \mathbf{0}$ としてよい. $\mathbf{u}$ は非負で非自明だから $u_i(r) > 0,\ r \ge r_*,\ i = 1,2,\cdots,m$, となるような $r_* > r_0$ が存在する. 十分大きな $R \ge r_*$ を任意に固定する. Lemma 2.3 より

$$\begin{aligned} u_i(r) &\ge u_i(0) + \left(\int_0^r s^{N-1}H_i(s)\left(\log\frac{r}{s}\right)^{N-1} u_{i+1}(s)^{\alpha_i}ds\right)^{\frac{1}{N-1}} \\ &\ge \left(\int_{e^R}^r s^{N-1}H_i(s)(\log r - \log s)^{N-1}u_{i+1}(s)^{\alpha_i}ds\right)^{\frac{1}{N-1}}, \quad r \ge e^R. \end{aligned} \tag{2.2}$$

$\log s = t,\ \log r = \rho$ とおくと (2.2) は

$$u_i(e^\rho) \ge \left(\int_R^\rho e^{Nt}H_i(e^t)(\rho - t)^{N-1}u_{i+1}(e^t)^{\alpha_i}dt\right)^{\frac{1}{N-1}}, \quad \rho \ge R, \quad i = 1,2,\cdots,m,$$

となる. H_i の仮定より

$$\begin{aligned} u_i(e^\rho) &\ge \left(C_i\int_R^\rho t^{-\lambda_i}(\rho - t)^{N-1}u_{i+1}(e^t)^{\alpha_i}dt\right)^{\frac{1}{N-1}} \\ &\ge \left(\tilde{C}_iR^{-\lambda_i}\int_R^\rho (\rho - t)^{N-1}u_{i+1}(e^t)^{\alpha_i}dt\right)^{\frac{1}{N-1}}, \quad R \le \rho \le 3R, \end{aligned}$$

ここで $\tilde{C}_i > 0$ は定数. 以後, 様々な定数を C で表すことにする. $f_i,\ i = 1,2,\cdots,m$, を次で定義する,

$$f_i(\rho) = \tilde{C}_iR^{-\lambda_i}\int_R^\rho (\rho - t)^{N-1}u_{i+1}(e^t)^{\alpha_i}dt, \quad R \le \rho \le 3R. \tag{2.3}$$

明らかに $f \in C^N[R, 3R]$ で f_i は次を満たすことがわかる:

$$u_i(e^\rho) \ge f_i(\rho)^{\frac{1}{N-1}}, \quad R \le \rho \le 3R,$$

$$f_i^{(k)}(\rho) \geq 0, \quad R \leq \rho \leq 3R, \quad f_i^{(k)}(R) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, N-1,$$

(2.4)
$$\begin{aligned} f_i^{(N)}(\rho) &= CR^{-\lambda_i} u_{i+1}(e^\rho)^{\alpha_i} \\ &\geq CR^{-\lambda_i} f_{i+1}(\rho)^{\frac{\alpha_i}{N-1}}, \quad R \leq \rho \leq 3R. \end{aligned}$$

(2.3) と u_i の単調性から

(2.5)
$$\begin{aligned} f_i(\rho) &\geq CR^{-\lambda_i} u_{i+1}(e^R)^{\alpha_i} \int_R^\rho (\rho - t)^{N-1} dt \\ &\geq CR^{-\lambda_i} (\rho - R)^N u_{i+1}(e^R)^{\alpha_i}, \quad R \leq \rho \leq 3R. \end{aligned}$$

$i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ を固定する. 「(2.4) の両辺に f_{i+1} を掛けて $[R, \rho]$ で積分する」を N 回行って

$$f_i(\rho) f'_{i+1}(\rho)^N \geq CR^{-\lambda_i} f_{i+1}(\rho)^{\frac{\alpha_i}{N-1}+N}, \quad R \leq \rho \leq 3R.$$

(2.4) から

$$f_{i-1}^{(N)}(\rho) f'_{i+1}(\rho)^{\frac{N\alpha_{i-1}}{N-1}} \geq CR^{-\frac{\lambda_i \alpha_{i-1}}{N-1} - \lambda_{i-1}} f_{i+1}(\rho)^{\frac{\alpha_i \alpha_{i-1}}{(N-1)^2} + \frac{N\alpha_{i-1}}{N-1}}, \quad R \leq \rho \leq 3R,$$

を得る. 同じ事を繰り返して

(2.6)
$$f_{i+1}^{(N)}(\rho) f'_{i+1}(\rho)^{K_i} \geq CR^{-L_i} f_{i+1}(\rho)^{M_i}, \quad R \leq \rho \leq 3R,$$

ここで

$$\begin{aligned} K_i &= \sum_{j=1}^{m-1} \left\{ \frac{N}{(N-1)^{m-j}} \prod_{k=j}^{m-1} \alpha_{i-k} \right\}, \\ L_i &= \sum_{j=1}^{m-1} \left\{ \frac{\lambda_{i-(j-1)}}{(N-1)^{m-j}} \prod_{k=j}^{m-1} \alpha_{i-k} \right\} + \lambda_{i+1}, \\ M_i &= \frac{A}{(N-1)^m} + K_i. \end{aligned}$$

「(2.6) に f'_{i+1} を掛けて $[R, \rho]$ で積分する」を $(N-1)$ 回行って

$$f'_{i+1}(\rho) f_{i+1}(\rho)^{-\frac{A-(N-1)^m}{(K_i+N)(N-1)^m} - 1} \geq CR^{-\frac{L_i}{K_i+N}}, \quad R < \rho \leq 3R,$$

を得る. この不等式を $[2R, 3R]$ で積分する, (2.5) と K_i, L_i の定義より

$$u_{i+2}(e^R) \leq CR^{\frac{(N-1)^{m-1} \Lambda_{i+2}}{A-(N-1)^m}}$$

を得る. このことから (2.1) を得る.(詳細は [5] を参照.)□

3. Nonexistence results

(0.1) の球対称な非負値全域解の非存在について次の結果を得た：

Theorem 3.1. H_i, $i = 1, 2, \cdots, m$, は次を満たすとする：

$$H_i(|x|) \geq \frac{C_i}{|x|^{\lambda_i}}, \quad |x| \geq r_0 > 0,$$

ここで $C_i > 0$, λ_i, $i = 1, 2, \cdots, m$, は定数. さらに, この λ_i に対して Λ_i が

$$\Lambda_i \leq \frac{A-P}{P} \max\{0, p_i - N\} \quad \text{for some} \quad i \in \{1, 2, \cdots, m\},$$

を満たすとする. このとき $(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ が (0.1) の球対称な非負値全域解ならば

$$(u_1, u_2, \cdots, u_m) \equiv (0, 0, \cdots, 0).$$

証明は [5] を参照.

Remark. この結果は $m = 2$ のとき [3] の結果と一致する.

Theorem 3.2. $p_i = N$, $i = 1, 2, \cdots, m$, とする. H_i, $i = 1, 2, \cdots, m$, は次を満たすとする：

$$H_i(|x|) \geq \frac{C_i}{|x|^N (\log|x|)^{\lambda_i}}, \quad |x| \geq r_0 > 1,$$

ここで $C_i > 0$, λ_i, $i = 1, 2, \cdots, m$, は定数. さらに, この λ_i に対して Λ_i が

$$\Lambda_i \leq \frac{A-(N-1)^m}{(N-1)^{m-1}} \quad \text{for some} \quad i \in \{1, 2, \cdots, m\}$$

を満たすとする. このとき $(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ が (0.1) の球対称な非負値全域解ならば

$$(u_1, u_2, \cdots, u_m) \equiv (0, 0, \cdots, 0).$$

Remark. Theorem 3.2 から Introduction で述べた予想が正しいことがわかる.

Example. 次の 2 階楕円型方程式系を考える.

$$\begin{cases} \Delta_{p_1} u_1 = \dfrac{1}{(1+|x|)^{\lambda_1}} u_2^{\alpha_1}, \\ \Delta_{p_2} u_2 = \dfrac{1}{(1+|x|)^{\lambda_2}} u_3^{\alpha_2}, \\ \quad \vdots \\ \Delta_{p_m} u_m = \dfrac{1}{(1+|x|)^{\lambda_m}} u_1^{\alpha_m}, \end{cases} \quad x \in \mathbf{R}^N, \tag{3.1}$$

ここで $N \geq 1$, $p_i > 1$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, m$, は定数で $A > P$ を満たすとする. $|x| \geq 1$ で

$$\frac{C_i}{|x|^{\lambda_i}} \leq \frac{1}{(1+|x|)^{\lambda_i}} \leq \frac{\tilde{C}_i}{|x|^{\lambda_i}}, \quad |x| \geq 1, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

が成り立つことがわかる．従って，Theorems 1.1, 3.1 より (3.1) の球対称な正値全域解が存在するための必要十分条件は

$$\Lambda_i > \frac{A-P}{P}\max\{0, p_i - N\}, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

Theorem 3.2 の証明の概略. $(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ を (0.1) の非自明な非負値全域解とする．このとき，u_i, $i = 1, 2, \cdots, m$, は次の常微分方程式系を満たす．

$$\begin{cases} (r^{N-1}|u_i'(r)|^{p_i-2}u_i'(r))' = r^{N-1}H_i(r)u_{i+1}(r)^{\alpha_i}, & r > 0, \\ u_i'(0) = 0, & \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, m. \tag{3.2}$$

Theorem 2.2 より u_i, $i = 1, 2, \cdots, m$, は

$$u_i(r) \le C_i(\log r)^{\beta_i} \quad \text{at} \quad \infty \tag{3.3}$$

を満たす，ここで $C_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, m$, は定数．もし

$$\Lambda_{i_0} < \frac{A-(N-1)^m}{(N-1)^{m-1}}$$

となる $i_0 \in \{1, 2, \cdots, m\}$ があれば β_{i_0} の定義から $\beta_{i_0} < 1$ となる．一方 (3.2) を積分して

$$\begin{aligned} u_{i_0}(r) &= u_{i_0}(0) + \int_0^r s^{-1}\left(\int_0^s t^{N-1}H_{i_0}(t)u_{i_0+1}(t)^{\alpha_{i_0}}\,dt\right)^{\frac{1}{N-1}} ds \\ &\ge \int_{r_*}^r s^{-1}ds\left(\int_0^{r_*} t^{N-1}H_{i_0}(t)u_{i_0+1}(t)^{\alpha_{i_0}}\,dt\right)^{\frac{1}{N-1}} \\ &\ge C\log r, \quad r \ge r_1 > r_*, \end{aligned} \tag{3.4}$$

ただし $C > 0$ は定数．これは (3.3) で $\beta_{i_0} < 1$ に矛盾する．従って

$$\Lambda_i \ge \frac{A-(N-1)^m}{(N-1)^{m-1}}, \quad i = 1, 2, \cdots, m,$$

の場合を考える．Λ_i の仮定から

$$\Lambda_{i_0} = \frac{A-(N-1)^m}{(N-1)^{m-1}}$$

となる $i_0 \in \{1, 2, \cdots, m\}$ が存在する．この i_0 として $i_0 = m$ としてもよい．

$$\Lambda_i \ge \frac{A-(N-1)^m}{(N-1)^{m-1}} \quad と \quad \Lambda_m = \frac{A-(N-1)^m}{(N-1)^{m-1}}$$

から

$$\lambda_i \le -\sum_{j=1}^{m-i-1}\left\{\frac{(\lambda_{i+j}-N)}{(N-1)^j}\prod_{k=0}^{j-1}\alpha_{i+k}\right\} + \frac{\prod_{k=0}^{m-i-1}\alpha_{i+k}}{(N-1)^{m-i-1}} + 1, \; i = 1, 2, \cdots, m-2, \tag{3.5}$$

$$\lambda_{m-1} \leq \alpha_{m-1} + 1. \tag{3.6}$$

(3.2) を $[r_*, r]$ で 2 回積分して

$$u_i(r) \geq u_i(r_*) + \int_{r_*}^{r} s^{-1} \left(\int_{r_*}^{s} t^{N-1} H_i(t) u_{i+1}(t)^{\alpha_i} dt \right)^{\frac{1}{N-1}} ds \tag{3.7}$$

(3.4) と同じ計算で

$$u_m(r) \geq C \log r, \quad r \geq r_1 > r_*,$$

を得る, ここで $C > 0$ は定数. この評価と (3.5), (3.6), (3.7) から

$$\Lambda_{i_0} = \frac{A - (N-1)^m}{(N-1)^{m-1}} \quad \text{for some} \quad i_0 \in \{1, 2, \cdots, m\},$$

$$\Lambda_i > \frac{A - (N-1)^m}{(N-1)^{m-1}}, \quad i = i_0 + 1, i_0 + 2 \cdots, m-1$$

のとき

$$u_{i_0}(r) \geq C \log r (\log(\log r))^{\frac{1}{N-1}}, \quad r \geq r_2 > r_1,$$

を得る, ただし $C > 0$ は定数. 一方 (3.3) と β_{i_0} の定義から

$$u_{i_0}(r) \leq C \log r \quad \text{at} \quad \infty$$

がわかる. これは矛盾.(詳細は [5] を参照.) □

参考文献

[1] Y. Furusho, T. Kusano and A. Ogata, Symmetric positive entire solutions of second order quasilinear degenerate elliptic equations, Arch. Rational Mech. Anal., 127(1994), 231-254

[2] Y. Naito and H. Usami, Nonexistence results of positive entire solutions for quasilinear elliptic inequalities, Canad. Math. Bull., 40(1997),244-253.

[3] T.Teramoto, Existence and nonexistence of positive radial entire solutions of second order quasilinear ellipitc systems, Hiroshima. Math. J., 30(2000), 437-461.

[4] T.Teramoto, On nonnegative entire solutions of second order semilinear elliptic systems, preprint.

[5] T.Teramoto, On nonnegagive radial entire solutions of second order quasilinear elliptic systems, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., 2002, No.16. URL http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/2002/200216.html

[6] S. Yarur, Nonexistence of positive singular solutions for a class of semilinear elliptic systems, Electron. J. Differential Equations, 1996, No.08.